Capitolo 2

Rappresentazione dell'incertezza di misura

In questo capitolo ci occupiamo dei metodi di rappresentazione dell'incertezza di misura, facendo riferimento alle linee guida presenti nella GUM, nel VIM e alle definizioni date nel capitolo precedente. Solo per completezza di trattazione rispetto ad altri testi viene inizialmente fornita la descrizione del *modello deterministico* per la rappresentazione dell'incertezza di misura e della sua propagazione. Più avanti prenderemo in considerazione invece il *modello probabilistico* che è quello attualmente usato e raccomandato dalla GUM e infine la legge di propagazione delle distribuzioni di probabilità contenuta nel Supplemento1.

Al fine di descrivere nel dettaglio i diversi modelli di rappresentazione dell'incertezza occorre richiamare le possibili classificazioni dei metodi di misurazione.

2.1 Classificazione dei metodi di misurazione

Una prima classificazione dei metodi di misurazione, che è basata sul numero di letture eseguite per assegnare un valore alla quantità misurata, permette di distinguere tra:

- metodi di misurazione a lettura singola, nei quali la misura è assegnata in seguito all'esecuzione di una singola lettura su ciascuno degli strumenti coinvolti per misurare diverse quantità;

- metodi di misurazione a letture ripetute, che prevedono di eseguire più letture di ogni grandezza in condizioni nominalmente uguali, quindi assegnare la misura come risultato di un'analisi statistica dell'insieme dei dati così ottenuti.

Un altro tipo di classificazione dei metodi di misurazione è quella che tiene conto delle modalità operative di assegnazione di una misura ad un parametro, che permette di individuare le seguenti due categorie:

- metodi di misurazione diretti sono quelli che permettono di assegnare la misura ad un parametro a partire da una lettura, o da una serie di letture, di uno strumento senza dover conoscere altri parametri del sistema misurato, eccetto il valore di eventuali campioni, le grandezze di influenza e le grandezze espressamente richiamate nella definizione del misurando;

- metodi di misurazione indiretti sono quelli in cui la misura di un parametro è assegnata come risultato di un calcolo che coinvolge il valore di altri parametri misurati in modo diretto.

2.1.1 Metodi di misurazione diretti

I metodi di misurazione diretti sono basati sul confronto tra la quantità misurata ed una grandezza della stessa specie generata da (o memorizzata in) un campione locale. Le misurazioni dirette più frequenti sono quelle eseguite con il metodo a lettura diretta, ossia assegnando la misura M a partire dall'indicazione L fornita da uno strumento al cui ingresso è applicato il misurando mediante una relazione $M = f_T(L)$ dove f_T è il diagramma di taratura (vedi Capitolo 4) memorizzato nello strumento impiegato. Questo metodo di misurazione presuppone quindi che lo strumento sia sottoposto a taratura prima dell'uso, allo scopo di determinare la corrispondenza tra le letture fornite dallo strumento e le misure delle grandezze applicate al suo ingresso.

I principali contributi di incertezza delle misure ottenute con questa tecnica sono:

- incertezza strumentale, che è dichiarata dal costruttore e che solitamente dipende dal valore assunto dalle grandezze di influenza significative e dal tempo trascorso dall'ultima operazione di messa in punto;
- incertezza di lettura (significativa soprattutto nel caso di strumenti a indicazione analogica);
- carico strumentale, ossia alterazione del sistema misurato conseguente all'interazione con lo strumento;
- incertezza intrinseca del misurando, che è legata alla sua definizione;
- imperfetta realizzazione della definizione del misurando, dovuta alla conoscenza non perfetta delle grandezze che definiscono lo stato del sistema misurato;
- incertezza con cui sono note le grandezze di influenza.

Fra i metodi diretti ricordiamo poi i metodi di *misura per confronto*: *per opposizione* ossia per confronto con una grandezza della stessa specie (e.g misura di lunghezza mediante confronto con campioni di lunghezza) e *i metodi di zero* che ricercano una condizione di equilibrio o di annullamento (e.g., misura di peso con bilancia a due piatti).

2.1.2 Metodi di misurazione indiretti

Considereremo indiretto un metodo di misurazione quando la misura del parametro di un sistema è assegnata mediante un calcolo che coinvolge altri parametri del sistema stesso o di altri sistemi con esso interagenti. La stima di questi parametri è ottenuta mediante metodi di misurazione diretti. L'applicazione di un metodo di misurazione indiretto presuppone quindi l'esistenza di un modello matematico, che esprima in modo esplicito il legame tra il misurando e le altre grandezze sottoposte a misurazione diretta. Se si indicano con M_I il misurando ottenuto indirettamente e con M_{Di} le grandezze misurate per via diretta, questo legame può essere espresso mediante la relazione:

$$M_I = f(M_{D1}, M_{D2}, \cdots, M_{DN}). \tag{2.1}$$

Esempi di misurazione indiretta sono la determinazione del volume di una sfera a partire dalla misura del suo diametro, oppure la stima della resistenza elettrica di un dispositivo mediante il metodo voltamperometrico (rapporto tensione su corrente). Nel caso dei metodi di misurazione indiretti, l'incertezza è stimata a partire dalle incertezze delle grandezze ottenute per via diretta applicando le regole descritte nei paragrafi successivi. In questo caso, un contributo di incertezza aggiuntivo è costituito dalla cosiddetta incertezza di modello, che tiene conto del fatto che il modello espresso mediante la relazione (2.1) non descrive in modo adeguato le interazioni tra il misurando e gli altri parametri sottoposti a misurazione diretta. Se si considera nuovamente il caso della misura del volume di un solido ottenuta a partire dalla misura del suo diametro, l'incertezza di modello potrebbe essere legata, per esempio, al fatto che il solido non ha esattamente forma sferica o alla non perfetta conoscenza della legge di dilatazione termica del solido in esame.

Nei successivi paragrafi si forniranno le regole generali di valutazione dell'incertezza nei diversi casi individuati, prima per il modello deterministico e poi per il modello probabilistico

2.2 La stima dell'incertezza di misura: il modello deterministico

Il modello deterministico per la stima dell'incertezza, molto diffuso in passato ed ancora oggi impiegato in ambiti in cui è accettata una sovrastima dell'incertezza, prevede di assegnare la misura ad un parametro sotto forma di un intervallo limitato, detto fascia di valore, che solitamente è simmetrico rispetto al valore nominale M_0 assegnato alla quantità misurata. La fascia di valore è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1) è ragionevolmente garantito che il misurando è compreso nella fascia di valore;

2) tutti gli elementi della fascia di valore sono ugualmente validi a rappresentare il misurando.

Anche nel caso in cui la fascia di valore è assegnata applicando tecniche statistiche ad un insieme di dati ottenuti con un metodo a letture ripetute, tutti gli elementi della fascia di valore devono essere considerati ugualmente rappresentativi del misurando, in quanto non si fa alcuna ipotesi riguardo alla distribuzione di probabilità dei valori assegnati. La misura M di un parametro può essere quindi espressa mediante la seguente relazione:

$$M = (M_0 \pm I)U$$

dove I è l'incertezza assoluta della misura, che è espressa nella stessa unità di misura U di M_0. L'intervallo di ampiezza $2I$ rappresenta la fascia di valore assegnata come misura del parametro. Spesso viene fornita *l'incertezza relativa* I_r o *l'incertezza relativa percentuale* pari rispettivamente a

$$I_r = \frac{I}{M_0} \quad I_{r\%} = \frac{I}{M_0}100$$

che danno subito una misura della qualità della misura.

2.2.1 La propagazione dell'incertezza

L'incertezza di misura di un parametro dipende solitamente da più cause, come evidenziato nel capitolo precedente, ed è ottenuta combinando opportunamente i vari contributi di incertezza. Nel caso di misure ottenute con metodi diretti, si esegue semplicemente la somma dei vari contributi di incertezza: nel caso di una misura a lettura diretta si sommeranno, per esempio, l'incertezza strumentale e l'incertezza di lettura, mentre nel caso di una misura assegnata applicando un metodo di confronto per opposizione, si sommeranno l'incertezza con cui è noto il campione impiegato e l'incertezza legata alla non perfetta realizzazione della condizione di equivalenza tra misurando e grandezza generata dal campione. Se la misura è invece assegnata ricorrendo ad un metodo indiretto, i contributi di incertezza legati alle varie grandezze si combinano secondo le regole indicate di seguito.

Si indichi con y la quantità da misurare indirettamente, che risulta legata alle quantità x_i misurate direttamente, mediante il seguente modello funzionale

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N).$$

Il valore centrale y_0 della fascia di valore assegnata come misura di y è ottenuto a partire dai valori centrali x_{i0} mediante la relazione

$$y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{N0}).$$

Il valore assoluto I_y dell'incertezza di misura, ossia la semiampiezza della fascia di valore di y, è invece ottenuta a partire dalle incertezze assolute I_{x_i} delle grandezze x_i mediante la relazione:

$$I_y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_{10},\cdots,x_{N0})} \cdot I_{x_1} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|_{(x_{10},\cdots,x_{N0})} \cdot I_{x_N} \tag{2.2}$$

Il modello espresso dalla relazione (2.2) rappresenta lo sviluppo in serie di Taylor approssimato ai termini del primo ordine (sviluppo lineare) della funzione f intorno al punto $(x_{10}, \cdots, x_{N0})$. Se la funzione f è lineare, la relazione è esatta, in quanto i termini di ordine superiore al primo sono tutti nulli. Se invece f è non lineare, la relazione fornisce un valore approssimato di I_y; questa approssimazione è solitamente accettabile, in quanto gli incrementi $I_{x_1}, \cdots, I_{x_N}$ (le incertezze delle grandezze x_i) sono tali da rendere trascurabili i contributi legati ai termini di ordine superiore al primo. Si osservi che il modello di propagazione dell'incertezza espresso dalla relazione (2.2) porta inevitabilmente ad una stima per eccesso dell'incertezza della grandezza y, in quanto si considera il valore massimo delle incertezze I_{x_i} ed i vari contributi sono sommati in valore assoluto, quindi si esclude a priori la possibilità di una compensazione, anche parziale, tra i contributi di incertezza.

2.2.2 Modalità di dichiarazione di una misura

Nel caso di una misura ottenuta applicando il modello deterministico per il calcolo dell'incertezza, le informazioni essenziali da fornire sono:

- il valore stimato del misurando e la corrispondente unità di misura;
- la fascia di valore assegnata al misurando, che può essere espressa mediante l'incertezza assoluta o relativa;
- il valore e l'incertezza delle grandezze che individuano lo stato del sistema misurato e delle grandezze di influenza.

2.3 La stima dell'incertezza di misura: il modello probabilistico

Il principale obiettivo della GUM è la definizione di un nuovo modello, accettato a livello internazionale, in grado di fornire una stima dell'incertezza più realistica di quella ottenuta con il modello deterministico. Quest'ultimo, infatti, porta inevitabilmente a sovrastimare l'incertezza, visto che è basato su ipotesi eccessivamente pessimistiche, come descritto nel precedente paragrafo. Il modello descritto nella GUM è basato su un approccio di tipo probabilistico, in quanto la quantità misurata è trattata come una v.a. a cui è associata un'opportuna funzione di densità di probabilità (ddp)[1]. Come si vedrà in seguito, il valore assegnato al misurando è una stima del valore atteso della sua ddp[2]. Nell'ipotesi che questa stima non risulti polarizzata, ossia che non permangano errori sistematici, la grandezza che esprime gli scostamenti delle singole osservazioni del misurando dal suo valor medio è una v.a. a valor medio nullo: la deviazione tipo (la radice quadrata in modulo della varianza) della ddp associata a questa nuova v.a. è assunta come informazione *quantitativa* dell'incertezza di misura ed è detta *incertezza tipo.* L'ipotesi di assenza di polarizzazione dalla stima del misurando presuppone che nessuna grandezza introduca sul risultato della misurazione un errore sistematico. Esempi di effetti sistematici sono il mancato azzeramento di uno strumento di misura oppure l'alterazione del sistema misurato provocata dall'interazione con uno strumento (carico strumentale). Per l'applicazione del modello probabilistico per il calcolo dell'incertezza risulta quindi fondamentale che:

1. l'operatore sia in grado di individuare tutti gli effetti sistematici significativi;
2. gli effetti sistematici individuati siano corretti mediante un opportuno modello.

Mentre nel modello deterministico la fascia di valore assegnata al misurando individua un intervallo all'interno del quale è ragionevolmente compreso il misurando, nel modello probabilistico la fascia di valore assume il significato di intervallo che comprende il misurando con una probabilità assegnata. La fascia di valore così definita prende il nome di *intervallo di fiducia* e la probabilità che il misurando appartenga a tale intervallo è detto *livello di fiducia.* Se si indica con x la generica grandezza misurata e con $u(x)$ la corrispondente incertezza tipo, l'intervallo di fiducia è individuato dall'incertezza estesa $U(x)$, ottenuta moltiplicando per un opportuno coefficiente k, detto *fattore di copertura*, l'incertezza tipo. Indicando con x_0 la stima del misurando, l'intervallo di fiducia risulta compreso tra gli estremi $x_0 - ku(x)$ e $x_0 + ku(x)$. Il livello di fiducia può essere ricavato solo nel caso in cui sia nota la funzione ddp della v.a. associata alla grandezza misurata.

2.3.1 Valutazione di categoria A dell'incertezza

Si supponga di misurare la generica grandezza x mediante un metodo di misurazione a letture ripetute e si indichino con $x_1, x_2, \cdots, x_N$ le N osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità (nel seguito anche dette condizioni *nominalmente uguali*). Si supponga inoltre che le osservazioni della grandezza x siano tra di loro scorrelate, ossia che non abbiano fonti di incertezza comuni. Il valor medio delle osservazioni è stimato mediante la media empirica $\bar{x}$ come

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k.$$

Si osservi che la media empirica $\bar{x}$ è una v.a. con ddp asintoticamente Gaussiana (teorema del limite centrale); inoltre, se le osservazioni x_k hanno ddp Gaussiana, la media empirica

[1] Si veda più acanti il Capitolo 3

[2] Ricordiamo che il valore atteso di una ddp $f(x)$, indicato con $E(x)$ è dato da $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$ nel caso in cui $f(x)$ sia funzione continua, e da $E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot f_k(x)$ se $f_k(x) = f(x_k)$ è una funzione discreta.

avrà ddp Gaussiana anche nel caso in cui il numero di osservazioni è finito. La varianza σ^2 delle osservazioni è stimata mediante la varianza empirica $s^2(x)$:

$$s^2(x) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2.$$

La radice quadrata positiva $s(x)$ della varianza empirica è detta *scarto tipo sperimentale* ed indica il grado di dispersione delle singole osservazioni intorno alla media empirica $\bar{x}$. La varianza della media è stimata a partire dalla varianza empirica come[3]:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{N}$$

Lo scarto tipo sperimentale della media, ossia il grado di dispersione di diverse stime della media empirica $\bar{x}$ rispetto al valore sperato, è stimato come:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}$$

Questo valore non rappresenta lo sparpagliamento dei singoli valori, ma quanto il valore medio è rappresentativo. Esso è un indice di bontà del valore medio come valore rappresentativo. Notare infatti che al tendere di N all'infinito il valore medio tende al valore vero mentre la sua incertezza $s(\bar{x}) = u(\bar{x})$ tende a zero indipendentemente dal fatto che i valori delle misure ripetute risultino sparpagliate.

La misura della grandezza x è infine assegnata fornendo le seguenti informazioni:

- il valore centrale pari a $\bar{x}$;
- l'incertezza tipo $u(x)$ pari a $s(\bar{x})$.

2.4 Stimatori alternativi alla media: stimatori robusti

Quando si ha un set di misure ripetute non sempre si è fiduciosi del fatto che non si sono commessi errori sistematici nell'acquisizione degli stessi (nella loro misurazione). Le normative (GUM e VIM) raccomandano di effettuare l'analisi statistica per quantificare il contributo dell'incertezza associata al set di misure solo se si sono eliminati, corretti o ridotti gli effetti sistematici noti. Questa pratica comunque non è sempre semplice da eseguire, in quanto può non essere conveniente in termini di tempo e costi, interrompere una catena di lavoro per correggere errori sistematici. L'effetto di questi stessi può però essre estremamente dannoso, in quanto qualsiasi operazione successiva effettuata sul valore medio delle misure ne sarebbe fortemente influenzata e deviata dal risultato corretto. Mettiamoci quindi nella condizione in cui abbiamo a che fare con degli errori sistematici presenti saltuariamente nei miei dati (pensiamo ad esempio al caso delle correnti misurate e quindi a degli spike di durata piccolissima che fanno deviare alcune delle misure di corrente vistosamente).

Si può anche verificare il caso in cui gli errori sistematici non siano noti quindi non siano correggibili, ma si sa che possono essere presenti. In figura 2.1 è riportato un esempio di istogramma di misure ripetute riferite ad una grandezza X, in cui sono presenti errori sistematici di tipo estremamente locale che contribuiscono alle code di destra presenti nell'istogramma stesso.

---

[3] Vedremo più avanti che se ognuna delle misure x_i ha un'incertezza $u_{x_i} = u_x$ per ogni $i = 1, \ldots, N$ allora la propagazione di questa incertezza su $\bar{x}$, nell'ipotesi di misure x_i statisticamente indipendenti è data da $u_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} u_{x_i}^2\right)} = \sqrt{N \frac{1}{N^2} u_x^2} = \frac{u_x}{\sqrt{N}}$

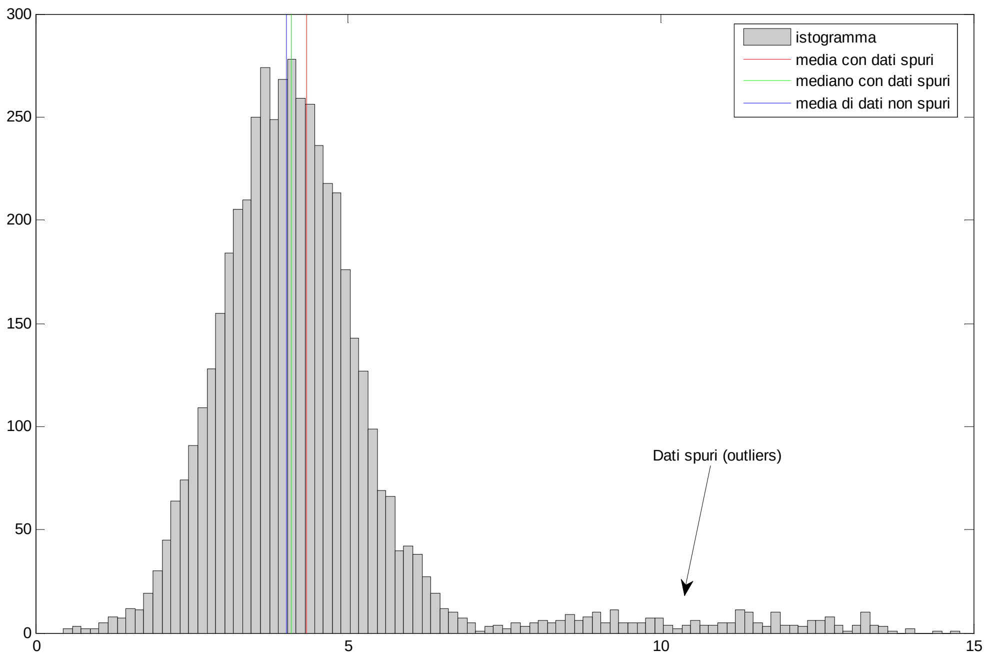


Figura 2.1: (a) Istogramma di misure ripetute con errori sistematici.

Supponiamo che i dati siano $N = 5000$ e indichiamo con x_i, $i = 1, \ldots, N$ dette misure ripetute. Supponiamo però che un certo numero sia stato affetto da errori sistematici per cui l'istogramma che mi aspettavo di forma approssimativamente gaussiana è risultato quello in figura con una coda a destra non attesa. Se ora effettuo la media delle misure ottengo un valore $\bar{x} = 4.3352$ indicato dalla linea rossa in figura. Sapendo che il valore vero, calcolato prima dell'introduzione dei dati spuri era $x_{\text{vero}} = 4.0102$ indicato dalla linea blu. Si evince che c'è uno scostamento verso destro del valore medio. Se ora applichiamo un operatore cosiddetto *robusto* a questi dati e cioè la cosiddetta mediana o operatore mediano cosı definito

Definizione 2.4.1. Si dice valore mediano di un set di dati non ordinati x_i, $i = 1, \ldots, N$ il valore centrale (se N è dispari) o la media dei due valori centrali (se N è pari) del set di dati $\tilde{x_i}$ ottenuti per ordinamento crescente dei dati x_i.

Un semplice esempio numerico farà capire questo operatore. Si consideri il vettore [0.2 0.1 0.0 0.3 0.2 1.0 0.9]. Se li ordiniamo otteniamo il vettore [0.0 0.1 0.2 0.2 0.3 0.2 1] e se prendiamo il valore centrale otteniamo 0.2. Se invece valutiamo la media otteniamo 0.3857 ossia un valore molto diverso. In questo caso possiamo però pensare che 0.9 e 1.0 siano due valori spuri e che l'operatore mediano sia risultato insensibile ad essi mentre l'operatore di media li ha considerati come validi. Questo operatore è tipicamente applicato nell'eliminazione di contributi di rumore dai segnali di tipo impulsivo come il rumore *sale e pepe*. Nelle immagini digitali questo tipo di rumore provoca la saturazione verso il bianco o verso il nero del valore di luminanza del pixel ma se con densità spaziale non troppo elevata può essere completamente rimosso mediante un operatore mediano come quello descritto. Un esempio in questo contesto è riportato in figura 2.2.

Figura 2.2: Effetto dell'operatore mediano sull'eliminazione del rumore *sale e pepe*.

2.4.1 Valutazione di categoria B dell'incertezza

La valutazione di categoria B dell'incertezza non è eseguita mediante l'analisi statistica di un insieme di osservazioni della quantità misurata, ma sulla base di informazioni fornite da terze parti.

L'insieme di informazioni che possono essere disponibili comprende (vedi GUM):

- dati di misurazione precedenti;
- esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà dei materiali e strumenti di interesse;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati forniti in certificati di taratura o altri;
- incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali.

Una situazione di questo tipo si verifica, per esempio, in un metodo di confronto per opposizione dove nella relazione di misura compare il valore di un campione materiale che solitamente è dichiarato in un certificato di taratura. Un altro esempio è quello delle misure ottenute con il metodo a letture dirette, dove uno dei principali contributi di incertezza è legato alle specifiche dello strumento di misura, dichiarate dal costruttore sotto forma di diagramma di taratura.

Una valutazione dell'incertezza tipo di categoria B può essere tanto attendibile quanto una di categoria A, soprattutto in quelle situazioni in cui la valutazione di categoria A è basata su un numero relativamente ridotto di osservazioni.

Riportiamo nel seguente paragrafo alcuni esempi tratti dal Supplemento1 [2] in cui sono citati esempi tipici di ipotesi di distribuzione nei casi in cui non si hanno a disposizione misure ripetute di uno stesso misurando.

2.4.2 Esempi di distribuzioni tipiche per dati a partire da ipotesi

Consideriamo la figura 2.3. In essa sono riportati alcuni esempi di casi standard in cui è possibile e ragionevole fare una certa ipotesi di distribuzione dei dati anche a partire da una sola misura e da conoscenze a priori sul fenomeno che si sta misurando. In questo caso l'incertezza standard e il valore rappresentativo non possono essere calcolati in modo frequentistico a partire da misure ripetute, ma possono essere valutati a posteriori in base alla distribuzione assunta e in base alla conoscenza della teoria dei fenomeni aleatori. Per questo motivo a questo punto occorre effettuare una digressione riguardante le variabili aleatorie, orientata alla rappresentazione e poi alla propagazione dell'incertezza di misura.

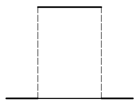
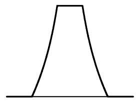
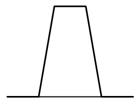
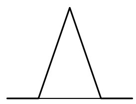
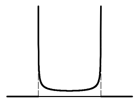
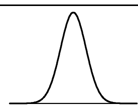
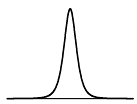
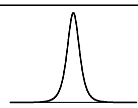
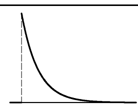
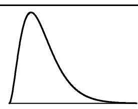
Available information	**Assigned PDF and illustration (not to scale)**	
Lower and upper limits a, b	Rectangular: R(a, b)	
Inexact lower and upper limits $a \pm d$, $b \pm d$	Curvilinear trapezoid: CTrap(a, b, d)	
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2	Trapezoidal: Trap(a, b, β) with $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert / (b - a)$	
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2 and the same semi-width ($b_1 - a_1 = b_2 - a_2$)	Triangular: T(a, b) with $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$	
Sinusoidal cycling between lower and upper limits a, b	Arc sine (U-shaped): U(a,b)	
Best estimate x and associated standard uncertainty $u(x)$	Gaussian: N(x,$u^2(x)$)	
Best estimate x of vector quantity and associated uncertainty matrix $\boldsymbol{U_x}$	Multivariate Gaussian: N($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{U_x}$)	
Series of indications $x_1,\ldots,x_n$ sampled independently from a quantity having a Gaussian distribution, with unknown expectation and unknown variance	Scaled and shifted t: $t_{n-1}\left(\bar{x}, s^2/n\right)$ with $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$	
Best estimate x, expanded uncertainty U_p, coverage factor k_p and effective degrees of freedom ν_{eff}	Scaled and shifted t: $t_{\nu_{\mathrm{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$	
Best estimate x of non-negative quantity	Exponential: Ex($1/x$)	
Number q of objects counted	Gamma: G($q + 1$, 1)	

Figura 2.3: Esempi di ipotesi ragionevoli per una valutazione B dell'incertezza di misura.

2.5 Richiami di teoria delle variabili aleatorie per la rappresentazione dell'incertezza di misura

Una variabile aleatoria (v.a. nel seguito) è una variabile a cui è associato un insieme di valori assumibili ma anche la probabilità con cui la variabile è in grado di assumere ognuno di quei valori. Se indichiamo dunque la variabile aleatoria con la lettera X, si avrà il range dei valori $[x_1, x_2]$, assumibili con continuità o in modo discreto a seconda che la v.a. sia continua o discreta, e anche la probabilità $P(X = x_i)$ o $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ che la v.a. X assuma il singolo valore x_i oppure che sia nell'intervallo $[\alpha, \beta]$. Al fine di esprimere questa probabilità, alla v.a. è anche associata una funzione, detta funzione cumulativa di probabilità *cumulative distribution distribution (cdf)* o funzione di distribuzione di probabilità, $F_X(x)$ così definita

$$F_X(\alpha) = P(X \leqslant \alpha), \quad F_X(\beta) - F_X(\alpha) = P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$$

Alla stessa variabile è associata anche una funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ definita così

$$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{d\,x}(x)$$

Si ha anche che

$$F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \int_\alpha^\beta f_X(x)\,dx$$

Da cui se $X \in [x_1, x_2]$ allora $P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = 1$ per cui si ha la nota proprietà della normalizzazione della pdf data da

$$\int_{D_X} f_X(x)\,dx = 1$$

dove D_X è il dominio di appartenenza della v.a. X (notare che esso in teoria può essere anche infinito). La funzione di densità di probabilità *probability density function (pdf)* è ottenibile, in assenza di assunzioni a priori sulla v.a. e sul suo comportamento come limite della distribuzione frequenziale (ossia dell'istogramma normalizzato dei valori assunti dalla v.a. nel range di appartenenza per un numero di prove che tende all'infinito). Vedremo più avanti alcuni esempi di questa procedura di stima della $f_X(x)$.

Una v.a. è univocamente descritta dalla pdf associata. Infatti da essa è possibile calcolare i cosiddetti momenti di ordine k della v.a. così definiti

$$m^k = E[x^k] = \int_{x_1}^{x_2} x^k f_X(x)\,dx$$

e i momenti centrali di ordine k

$$\mu^k = E[(x-\eta)^k] = \int_{x_1}^{x_2} (x-\eta)^k f_X(x)\,dx$$

dove $\eta = m_1$ è il momento di ordine 1 o anche *valore atteso* della v.a. X. Analogamente, μ^2 è anche detta varianza della v.a. X o momento centrale di ordine 2 e indicata solitamente con la lettera σ^2. Per diverse v.a. m_1 e σ^2 sono sufficienti per descrivere la v.a. in modo accettabile, ad esempio per v.a. con pdf simmetriche come la v.a. gaussiana ad esempio. Se però la v.a. ha una pdf asimmetrica, sono necessari i momenti di ordine superiore, come l'indice di *skewness* che fornisce una misura della asimmetria della v.a. Oppure la conoscenza dei momenti di ordine superiore sono necessari per distinguere due v.a. con medesimi η e σ^2 ma che potrebbero avere pdf diverse. Vediamo un esempio.

Esempio 2.5.1. Il valore della resistenza R di un resistore è una v.a. con distribuzione uniforme nel range $[900 \div 1100]\,\Omega$. La sua pdf è dunque rettangolare e per soddisfare la proprietà della normalizzazione essa sarà pari a

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{1100-900} = \frac{1}{200}, & R \in [900 \div 1100]\,\Omega \\ 0, & fuori. \end{cases}$$

Ora valutiamo le seguenti quantità:

1. La probabilità che $R \in [950 \div 1050]\,\Omega$;
2. il valore atteso di R;
3. la varianza di R.

La $P(950 \leqslant R \leqslant 1050) = \int_{950}^{1050} \frac{1}{200}\,dr = 0.5$.

Il valore atteso η_R è dato da

$$\eta_R = \int_{900}^{1100} r\frac{1}{200}\,dr = \frac{r^2}{400}\Big|_{900}^{1100} = \frac{1100^2 - 900^2}{400} = 1000$$

come aspettato essendo il valore centrale di una pdf simmetrica.

Infine la varianza σ_R^2 è data da

$$\begin{aligned} \mu^2 = \int_{900}^{1100} \frac{1}{200}(r-1000)^2 = \\ \int_{900}^{1100} \frac{r^2 + 10^6 - 2000 \cdot r}{200} = \\ \frac{1}{200}\left(\frac{r^3}{3} + 10^6 \cdot r - 2000\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{900}^{1100} = \\ \frac{1}{200}\left(\frac{r^3}{3} + 10^6 \cdot r - 2000\frac{r^2}{2}\right) = \frac{10^4}{3} \end{aligned}$$

Si può facilmente dimostrare che per una distribuzione uniforme nel range $[\alpha, \beta]$ vale la seguente formula

$$\sigma^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} = \frac{4 \cdot 10^4}{12} = \frac{10^4}{3}$$

Supponiamo ora che con questi η e σ^2 si costruisca una pdf di tipo gaussiano della forma

$$f_R(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} e^{\frac{(r-\eta_R)^2}{2\sigma_R^2}}$$

e calcoliamo di nuovo la probabilità di sopra. Si ha

$$P(950 \leqslant R \leqslant 1050) = \int_{950}^{1050} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(r-1000)^2}{2\sigma^2}}\,dr$$

Purtroppo la funzione gaussiana non ammette primitiva esplicita e occorre ricorrere alla tabulazione della sua primitiva che viene denominata *error function.* In tal modo si ottiene una probabilità pari a 0.61 maggiore di 0.5. La situazione ottenuta è riportata in figura 2.4.

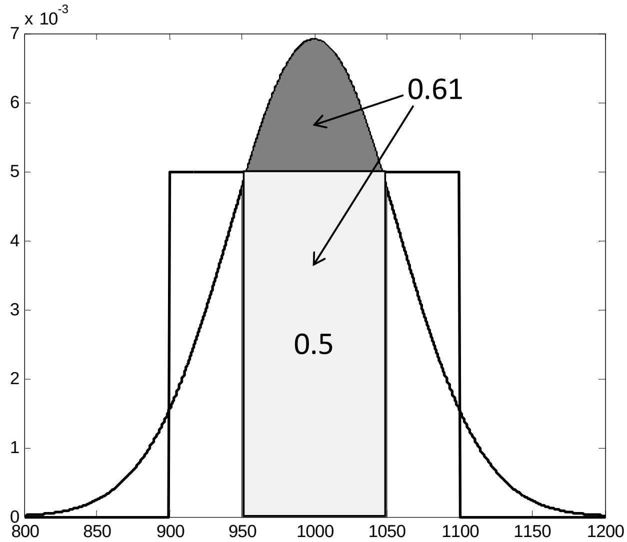


Figura 2.4: Differenti pdf con stessi η e σ.

La probabilità che una v.a. assuma valore in un intervallo è un concetto molto importante che riprenderemo più avanti. Possiamo anticipare fin d'ora che esso è associato ovviamente al livello di fiducia (o *probabilità di copertura*) che la v.a. sia in quell'intervallo, quindi una importante caratterizzazione dell'espressione dell'incertezza associata alla v.a.

Il valore finale dell'incertezza si calcolerà come l'incertezza standard $u(\bar{x})$ (misure ripetute) o $\sigma_x(x)$ (misura singola) moltiplicandole per un opportuno fattore detto *fattore di copertura* e indicato con k_p legato alla funzione di densità di probabilità ipotizzata (tipo B) o stimata a partire dall'istogramma (tipo A) e funzione della probabilità di copertura. La quantità $U(x) = u(x) \cdot k_p$ è detta *incertezza estesa.* Di seguito mostriamo dunque come sia possibile calcolare per alcuni casi notevoli il fattore di copertura data una certa probabilità di copertura.

2.5.1 Determinazione del fattore di copertura

In questo estratto diamo un esempio di come si possa calcolare il livello di fiducia associato alla dichiarazione dell'incertezza di misura. Il contesto è ovviamente svincolato dal tipo di valutazione dell'incertezza di categoria A o B (vedi Dispense) ma è legato solo alla natura dei fenomeni random coinvolti nel termine di incertezza.

Consideriamo innanzitutto il caso di misure ripetute (effetuate sotto condizioni di ripetibilità, vedi dispense) tramite le quali colleziono $N = 1000$ misure x_i, $i = 1, \ldots, N$, di una stessa grandezza X. Ne faccio l'istogramma e ottengo la situazione di figura 2.5(a).

Si può notare come la distribuzione sia con buona approssimazione uniforme. A questo punto si può anche notare che la fascia di valore assegnabile a questa misura è sicuramente $[3, 10]$. Se poi effettuo anche una analisi statistica ottengo i seguenti dati statistici:

- Media: $\bar{x} = 6.5271$
- Standard Deviation Empirica: $s_x = 2.0255$.

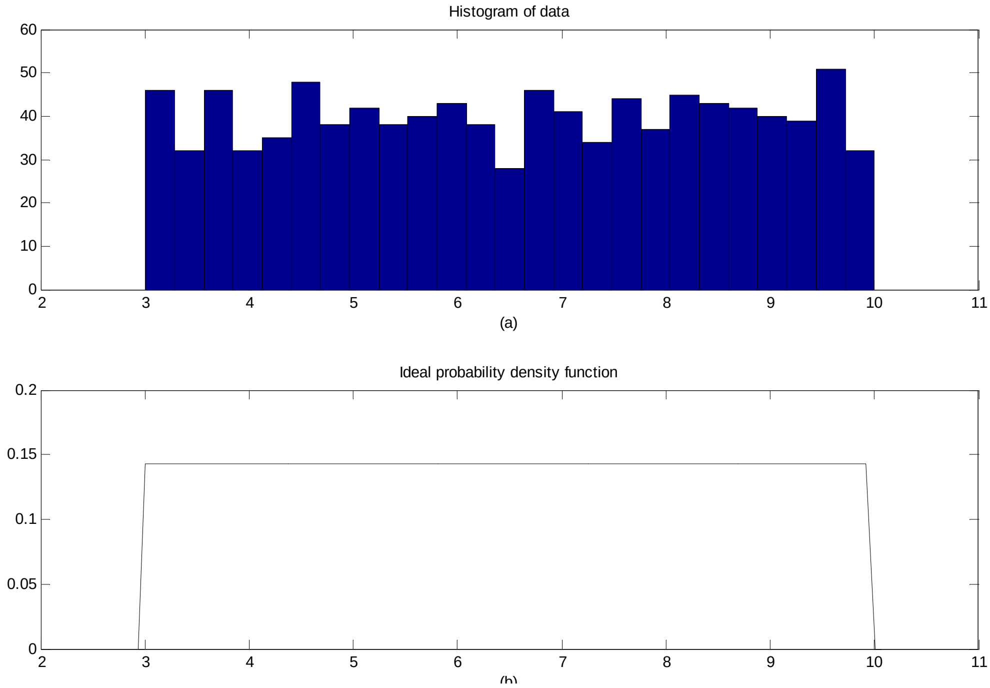


Figura 2.5: (a) Istogramma. (b) Distribuzione Teorica.

L'incertezza standard associata a tale misurazione è dunque data da

$$u_x = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = 0.0641.$$

A questo punto, seguendo le indicazioni della normativa, dobbiamo comunicare il risultato finale nella forma $\bar{x} \pm k \cdot u_x$, dove k è il cosiddetto *fattore di copertura* associato al risultato di misurazione con un certo *livello di fiducia* o an he *probabilità di copertura*. Potrei operare a questo punto in due modi:

1. il primo modo è, dato il livello di fiducia espresso come $P\,\%$, calcolare l'intervallo nell'istogramma che contiene tale percentuale di valori rispetto ad N. Questa pratica però non è conveniente in quanto è troppo dipendente (e quindi può essere alterata nella sua correttezza) dal numero di valori totali (N) e dal numero di intervalli nell'istogramma (L).

2. il secondo modo è quello di calcolare in via teorica il fattore k. L'assunzione da fare è sicuramente quella di una ddp nota. In questo caso, dall'istogramma, si evince che l'ipotesi uniforme è la più verosimile. Detta ddp (densità di probabilità) è in figura 2.5(b) nel medesimo intervallo $[3 \div 10]$. Notare come la ddp debba avere area 1 e quindi la sua altezza sia pari a $1/(x_M - x_m)$ dove $x_m = \min(x_i)$ e $x_M = \max(x_i)$.

   In questo caso rientra anche la valutazione di tipo B dell'incertezza in cui la valutazione deve essere fatta a partire da ipotesi a priori da farsi in base a conoscenza del fenomeno. Diversamente dal caso in cui l'ipotesi sulla ddp è supportata da un istogramma, in questo caso è supportata dall'esperienza e/o da poche informazioni a priori.

	k_p
$P = 0.90$	1.000
$P = 0.90$	1.645
$P = 0.95$	1.960
$P = 0.99$	2.576

Tabella 2.1: Fattori di copertura k_p per diverse probabilità di copertura e ddp gaussiana

A questo punto al condizione da imporre è che l'integrale compreso fra $\eta - k\sigma$ e $\eta + k\sigma$ della ddp debba essere pari alla probabilità di copertura P. Occorre quindi valutare la σ di quella ddp. La valutazione della σ per il calcolo del fattore k_p si effettua sempre a partire dalla ddp e mai dal calcolo frequentistico. Nell'esempio per definizione si ha che

$$\sigma^2 = \int_{x_m}^{x_M} f_x(x)(x - \bar{x})^2$$

In questo caso si può verificare che si ha

$$\sigma^2 = \frac{1}{(x_M - x_m)} \int_{x_m}^{x_M} (x - \bar{x})^2 = \frac{1}{(x_M - x_m)} \frac{x^3}{3} + x(\bar{x})^2 - \bar{x}x^2 \Big|_{x_m}^{x_M} =$$
$$\frac{1}{(x_M - x_m)} \left(\frac{1}{3}(x_M^3 - x_m^3) + (x_M - x_m)\bar{x}^2 - \bar{x}(x_M - x_m)^2 \right) = \frac{(x_M - x_m)^2}{12}$$

Quindi imponendo la condizione di sopra, il coefficiente k si calcola imponendo

$$\int_{-k\sigma+\bar{x}}^{k\sigma+\bar{x}} f_x(x)\, dx = P$$

Da cui, utilizzando l'espressione della ddp $f_x(x)$ e di σ si ha

$$\frac{1}{x_M - x_m} 2k\sigma = \frac{1}{x_M - x_m} 2k(x_M - x_m)/\sqrt{12} = \frac{k}{\sqrt{3}} = P$$

e infine $k = \sqrt{3}P$. In questo caso si ha una forma chiusa per il calcolo del fattore di copertura dato il livello di fiducia P. Ritornando all'esempio precedente, si ha quindi un'incertezza estesa $U(x) = ku(x)$ data da

$$U(x) = \sqrt{3}Pu(x)$$

Se supponiamo ad esempio un livello di fiducia del 90% si ha un'incertezza estesa pari a $U(x) = 0.1883$. Notiamo come, rispetto all'approccio in cui si dichiara la fascia di valore in questo caso $[3 \div 10]$ come dichiarazione dell'incertezza, (metodo deterministico), nel metodo probabilistico, si dichiara l'incertezza della media, ossia quanto la media è rappresentativa dei dati di misura. Quindi l'incertezza estesa è l'incertezza associata alla media delle misure con un livello di fiducia pari al 90% nell'esempio.

Se si considerassero ddp diverse occorrerebbe ripetere il calcolo. Ci si accorge però che se la ddp è una gaussiana il calcolo di k_p non può essere effettuato in forma chiusa ma si deve ricorrere alle tabelle. Ad esempio si ottengono i seguenti quattro tipici valori contenuti nella tabella 2.1.

2.6 Considerazioni finali

Resta comunque aperta la questione della rappresentazione ottimale dell'incertezza di misura quando la rappresentazione probabilistica non possa essere implementata. Pensiamo ad esempio a casi in cui non sia possibile, o mantenere condizioni ripetibilità o comunque, per ragioni che possano essere anche di costi e di tempo, collezionare un numero sufficientemente elevato di osservazioni ripetute. In questi casi, a meno che non si abbiamo altre informazioni riguardanti il fenomeno di cui si vuole misurare una proprietà, o fornite da terzi (in cui ricadano anche terzi laboratori, ma anche handbook, datasheet, reports di calibrazione, etc.) o provenienti dalla nostra esperienza di esperimenti simili o altro, è difficile, se non impossibile conoscere e/o stimare ragionevolmente la distribuzione di valori attribuibili al misurando, specificandone e/o stimandone i parametri caratteristici (solitamente almeno media e varianza). È altresì vero che l'ipotesi di una ddp Gaussiana è spesso altamente plausibile, grazie al Teorema del Limite Centrale (CLT) che ci garantisce che la somma di tanti effetti indipendenti, ognuno aventi statistiche anche diverse, tende ad un fenomeno distribuito statisticamente come una Gaussiana. In realtà l'esercizio ci dice ad esempio che già sommando tre v.a. con distribuzione uniforme si ottiene una distribuzione molto vicina ad una Gaussiana, nella forma. La stessa GUM, spesso suggerisce di far riferimento ad una distribuzione Gaussiana, quando si sa ad esempio che la v.a. in questione gode di simmetria e che è ragionevole pensare che essa sia la combinazione di più fenomeni e non originata da una fenomeno statistico prevalente (pensiamo ad esempio al rumore di quantizzazione rappresentato da una distribuzione uniforme, o l'incidenza di fotoni su una semiconduttore con conseguente liberazione di elettroni, schematizzato da una statistica di Poisson).

Nella GUM infatti i metodi impiegati per valutare i vari contributi di incertezza sono classificati in due categorie:

- valutazione di categoria A (Tipo-A) dell'incertezza basata su un approccio statistico di tipo frequentistico (approssimazione di una probabilità);

- valutazione di categoria B (Tipo-B) dell'incertezza eseguita mediante metodi diversi da quello frequentistico, per esempio a partire da informazioni note a priori.

Una valutazione di categoria A dell'incertezza può essere quindi eseguita solo quando si ha a disposizione un insieme di osservazioni della grandezza misurata, ottenute, per esempio, mediante l'applicazione di un metodo di misurazione a letture ripetute. In questo caso infatti è possibile stimare la ddp della variabile misurata mediante l'istogramma costruito a partire dalle numerose osservazioni. Vedremo di seguito come si lavora in questo caso.

La valutazione di categoria B dell'incertezza è invece eseguita sulla base di informazioni fornite da terze parti, come nel caso delle specifiche di incertezza di uno strumento di misura dichiarate dal costruttore. In questo caso ricadono le situazioni in cui la ddp deve essere assunta a priori e non stimata in modo da poter procedere comunque all'estrazione dell'intervallo di confidenza con relativo livello di confidenza associato. Come già detto nel Tipo-B valgono per l'assunzione a priori di una certa ddp tutte le informazioni aggiuntive che si possono collezionare sul fenomeno sotto osservazione e sui parametri utilizzati provenienti da esperienza diretta o indiretta (fornita da terzi). Anche se la GUM non fa riferimento esplicito a tecniche alternative specifiche, se una tecnica è in grado di fornire, in molti casi di scarsa e incompleta conoscenza di un certo fenomeno, semplicità di calcolo e al tempo stesso rispetto delle raccomandazioni presenti nella GUM riguardanti la rappresentazione del risultato della misurazione, essa può essere utilizzata.